類体論の構成について(保型形式とその周辺)

久保田, 富雄

数理解析研究所講究録
513巻 1984年 126-136

類体論の構成について

名大理　久保田富雄（Tomio Kubota）

（A）K_0/F_0 が代数体の有限次Abel拡大であるとき，F_0 のあるイデアル $\mathfrak{m}(K_0/F_0)$ をとれば，$\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}(K_0/F_0)}$ で，かつ総正な $\alpha \in F_0$ については，Artin記号 $\left(\frac{K_0/F_0}{(\alpha)}\right) = 1$ である．

という命題を K_0/F_0 に関するArtinの相互法則ということにする．これを仮定すれば，K_0/F_0 に関する類体論の主定理，すなわち $\left(\frac{K_0/F_0}{\mathfrak{a}}\right) = 1$ となるイデアルの群が，ノルムを含む合同類の合併であるということが簡単に導き出せる．その際，有力な補助手段として，比較的容易に証明できるところの

Prop. 1．代数体 F_0 のDedekindゼータ関数は，$s = 1$ の近傍まで接続され，$s = 1$ で1位の極をもつ．また，単位指標でない F_0 の類指標によるHeckeのL関数は，$s = 1$ の近傍に正則に接続される．

および，これから直ちに導びかれる

Prop. 2. Abel 拡大 K_0/F_0 について，与えられた Galois 群の元を Frobenius 写像とする F_0 の素イデアルが無数に存在する．

を用いることができる．さらに，前提

（AA） すべての K_0/F_0 について（A）がなりたつ．

を置くならば，任意の代数体上の類体論は，存在定理，主種定理等を含めて，まず完全に構成される．

1 の n 乗根の群を $\mu_{(n)}$ とし，$\mu_{(n)}$ を含む代数体 F について，$K=F(\sqrt[n]{\alpha})$，$(\alpha\in F^{\times})$，の形の拡大を Kummer 拡大という．命題（AK）を次のように定める：

（AK） すべての Kummer 拡大について（A）がなりたつ．

定理 1. （AK）ならば（AA）である．

この定理は基本的には既知であるかも知れないが，それが正しいことを確認するためのひとつの道すじを示すのが，以下の主な目的である．定理2と定理3とを経由して定理1をいう．

定理2．$q=p^g$ を素数 p のベキとし，K_0/F_0 が q 次の巡回拡大であるとする．また，$p=2$ のときには $F_0 \ni \sqrt{-1}$ とする．このとき，仮定（AK）の下に，K_0/F_0 について（A）がなりたつ．

証．i）まず $p \neq 2$ とする．F_0 が1の原始 p 乗根 ρ を含まなければ，$(F_0(\rho):F_0)=p-1$ より，F_0 のイデアル $\mathfrak{a}$ について $\left(\frac{K_0(\rho)/F_0(\rho)}{\mathfrak{a}}\right)=\left(\frac{K_0/F_0}{\mathfrak{a}}\right)^{p-1}$．従って，$K_0(\rho)/F_0(\rho)$ で（A）ならば，K_0/F_0 でも（A）である．故に $F_0 \supset \mu_{(p)}$ としてよい．

ii）$F_0 \supset \mu_{(p)}$ を追加仮定し，ζ を1の原始 q 乗根として，$K=K_0(\zeta)$，$F=F_0(\zeta)$ とする．$\omega:\zeta \to \zeta^r$ が $Gal(F/F_0)$ の生成元であるとし，また $K=F(\sqrt[q]{\alpha})$ となる $\alpha \in F$ をとって，

$$\tau:\ \sqrt[q]{\alpha}^{\,\tau}=\zeta'\sqrt[q]{\alpha},\qquad (\zeta' \in \mu_{(q)}),$$

が $Gal(K/F)$ の生成元であるとすれば，K/F_0 が Galois 拡大であることから，まず

$$\alpha^{\omega} = \alpha^{x}\alpha_0'^{q}, \quad (x \in \mathbb{Z},\ \alpha_0' \in F),$$

がなりたつが，ωをKへ延長したもののひとつω'を

$$\omega' : \quad \sqrt[q]{\alpha}^{\,\omega'} = \sqrt[q]{\alpha}^{\,x}\alpha_0'$$

で定めれば，$\omega'\tau = \tau\omega'$ から，

$$\alpha^{\omega} = \alpha^{r}\alpha_0^{q}, \quad (\alpha_0 \in F),$$

のなりたつことがいえる．そこでωによって

(1) $$\sqrt[q]{\alpha}^{\,\omega} = \sqrt[q]{\alpha}^{\,r}\alpha_0$$

で定まるωのKへのもうひとつの延長をもあらわすことにすれば，$\omega^{q_0} \in Gal(K/F)$ が $q_0 = (F : F_0)$ についてなりたつことから，

(2) $$\sqrt[q]{\alpha}^{\,\omega^{q_0}} = \zeta_0\sqrt[q]{\alpha}, \quad (\zeta_0 \in \mu_{(q)}).$$

一方，(1)をくりかえし用いることにより

(3) $$\sqrt[q]{\alpha}^{\,\omega^{q_0}} = \sqrt[q]{\alpha}^{\,r^{q_0}}\alpha_0^{F(r,\omega)},$$

$$F(r,\omega) = r^{q_0-1} + r^{q_0-2}\omega + \cdots + r\omega^{q_0-2} + \omega^{q_0-1}.$$

$r^{q_0} - 1 = q\cdot y$ とおけば，yはpで割れず，(2)，(3)より

(4) $$\alpha^{-y} = \zeta_0^{-1}\alpha_0^{F(r,\omega)}$$

が得られる．(4)により，ある有限個の素イデアルを因子にもたないFのイデアル$\mathfrak{b}$について，計算により

(5) $$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)_q^{-y} = \left(\frac{\zeta_0^{-1}}{\mathfrak{b}}\right)_q \left(\frac{\alpha_0}{N_{F/F_0}\mathfrak{b}}\right)_q^{\omega^{-1}}$$

が得られる．$\left(\frac{*}{*}\right)_q$ はFにおけるq乗剰余記号である．

iii)　$Gal(\bar{\mathbb{Q}}/L)$ を $G(L)$ とかく．L は一般の代数体である．χ_0 を $G(F_0)$ の指標で，$G(K_0)$ で 1 になるものとし，χ_0 のひきおこす $G(F)$ の指標を χ とすれば，χ は $G(K)$ で 1 である．$\mu \in G(F)$ をとると，$K(\sqrt[q]{\zeta_0}, \sqrt[q]{\alpha_0})$ の F_0 上の Galois 閉包 Ω 上で μ と $\left(\frac{\Omega/F}{\mathfrak{b}}\right)$ とが一致するように $\mathfrak{b}$ がとれ，一方 $\chi(\mu) = (\sqrt[q]{\alpha}^{\,\mu-1})^{-yc}$ となるように $c \in \mathbb{Z}$ がとれるから，(5) によって

$$(6)\qquad \chi(\mu) = \chi_1(\mu)\chi_2(tr_{F_0\to F}\,\mu), \qquad (\mu \in G(F)),$$

が

$$\chi_1(\mu) = \sqrt[q]{\zeta_0^{-c}}^{\,\mu-1}, \qquad (\mu \in G(F)),$$

$$\chi_2(\mu') = \sqrt[q]{\alpha_0^{r'c}}^{\,\mu'-1}, \qquad (\mu' \in G(F),\ rr' \equiv 1 \pmod{q}),$$

とおいて得られる．tr は移送である．ところで，$\mathfrak{a}$ が F_0 の整イデアルで，Ω で分岐する素イデアルを因子に含まなければ，Ω/F_0 の最大 Abel 部分体を Ω' とするとき，$\left(\frac{\Omega'/F_0}{\mathfrak{a}}\right)$ は

$$\left(\frac{F/F_0}{\mathfrak{a}}\right) = 1$$

である限り $G(F)$ の元 μ に延長され，$tr_{F_0\to F}\,\mu$ は Ω においては $\left(\frac{\Omega/F}{\mathfrak{a}}\right)$ と一致する．故に (6) から

$$(7)\qquad \chi\left(\left(\frac{K_0/F_0}{\mathfrak{a}}\right)\right) = \zeta_0^{-c\frac{\|\mathfrak{a}\|-1}{q}} \cdot \left(\frac{\alpha_0^{r'c}}{\mathfrak{a}}\right)_q$$

となる．$\|\ \|$ は絶対ノルムである．$\mathfrak{a} = (\alpha)$ で，$\alpha \equiv 1$ が十分大きなイデアルを mod としてなりたてば，(7) における右辺

は仮定(AK)より1となるから，$\left(\frac{K_0/F_0}{\mathfrak{n}}\right)=1$である．(q. e. d.)

系．$F_0 \ni \sqrt{-1}$ならば，すべてのAbel拡大K_0/F_0について(A)がなりたつ．

これで問題は$F_0 \not\ni \sqrt{-1}$の場合に帰着されたが，このときは$F_0(\zeta)/F_0$が巡回的にならないことがあるので，定理2の論法が使えない．そこで，Weil [2]から次のことを引用する：

Prop. 3.　F/F_0が代数体の有限次Galois拡大であるとき，F_0のイデール類群C_{F_0}の元であって，C_{F_0}の単位元の連結成分D_{F_0}に入らず，Fのイデール類群C_Fの単位元の連結成分D_Fに入るものは，F/F_0で分岐するF_0の無限素点を$\mathfrak{p}_{t,\infty}$，$(t=1, 2, \cdots)$，とするとき，$\mathfrak{p}_{t,\infty}$成分が-1で他の成分がすべて1のイデールで代表されるイデール類δ_t全体で生成される群の単位元以外の元とD_{F_0}の元との積である．

このProp.はそれほど困難なく証明される．特にこれから用いるのは$F=F_0(\sqrt{-1})$のときだけであるので，いっそう簡単になり，[2]でcohomologyの言葉を用いてある所も，易しい言い方で置きかえられる．ただ，代数体において適当なイデ

アルをとれば，それを mod として $\equiv 1$ であるような単数は，与えられた m について単数の m 乗になるということを用いる必要があるが，これも高々 Prop. 2 程度のことを使えば証明される．

定理 3．F/F_0 が (A) のなりたつ Abel 拡大であり，さらにすべての Abel 拡大 K/F について (A) がなりたてば，仮定 (AK) の下に，すべての Abel 拡大 K_0/F_0 について (A) がなりたつ．

証．$G(K_0)$ で 1 となる $G(F_0)$ の指標 χ_0 をとり，χ_0 のひきおこす $G(F)$ の指標を χ とする．$K = K_0F$ とすれば，χ は $G(K)$ で 1 となる．Prop. 3 の記号を用いて，$a \in C_F$ とすれば，仮定により，$G(F)$ の Abel 化の中への標準写像 $a \to (a, F)$ があって，(a, F) は D_F で消える．一方 $\chi((a, F))$ の値は $N_{F/F_0}a$ だけで決まるから，

$$\chi((a, F)) = \tilde{\chi}_0(N_{F/F_0}a)$$

によって，$N_{F/F_0}C_F$ の指標 $\tilde{\chi}_0$ がきまる．δ_t，$(t = 1, 2, \cdots)$，の生成する群を Δ とすれば，F_0 の 2 次拡大については (AK) によって類体論の主定理ができているから，それを局所化した Hilbert - Hasse のノルム剰余記号も出来，特に Δ の任意の指標 $\tilde{\chi}_\Delta$ について，

(8) $$\tilde{\chi}_\Delta(\delta) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\gamma,\ \delta}{\mathfrak{p}}\right)_{2,F_0}$$

となる $\gamma \in F_0$ をとることができる．$\left(\frac{*,\ *}{\mathfrak{p}}\right)_{2,F_0}$ は F_0 における2次のノルム剰余記号で，積はすべての素点をわたる．特に $\tilde{\chi}_0$ の $\Delta \cap N_{F/F_0} C_F$ への制限が $\tilde{\chi}_\Delta$ のそこへの制限と一致するように γ をえらび，

$$\tilde{\chi}_1(a_0) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\gamma,\ a_0}{\mathfrak{p}}\right)_{2,F_0}, \qquad (a_0 \in C_{F_0}),$$

とおけば，$\tilde{\chi}_0(N_{F/F_0}a)\tilde{\chi}_1(N_{F/F_0}a)^{-1}$ は $\Delta \cap N_{F/F_0} C_F$ 上で1だから，$\tilde{\chi}_0(N_{F/F_0}a)\tilde{\chi}_1(N_{F/F_0}a)^{-1} = \tilde{\chi}_2(N_{F/F_0}a)$ となるような C_F/D_F の指標 $\tilde{\chi}_2$ が存在する．すなわち，

$$\chi((a,\ F)) = \tilde{\chi}_1(N_{F/F_0}a)\tilde{\chi}_2(N_{F/F_0}a).$$

$\mu \in G(F)$ について，F の最大Abel拡大で μ と一致するように (a, F) をとって考えれば，

(9) $$\chi(\mu) = \chi_1(\mu)\chi_2(tr_{F\to F_0}\mu), \qquad (\mu \in G(F)),$$

となるように $G(F)$ の指標 χ_2 のとれることがわかる．但し

$$\chi_1(\mu) = \sqrt{\gamma}^{\,\mu-1}, \qquad (\mu \in G(F)).$$

$K(\sqrt{\gamma})$ と χ_2 の定める F のAbel拡大体との合成の F_0 上のGalois閉包を Ω とし，Ω/F_0 の最大Abel部分体を Ω' とするとき，$\mathfrak{a}$ が F_0 の整イデアルで Ω で分岐する素イデアルを因子に含まなければ，$\left(\frac{\Omega'/F}{\mathfrak{a}}\right)$ は

$$\left(\frac{F/F_0}{\mathfrak{n}}\right) = 1$$

である限り，$G(F)$ の元 μ に延長され，$tr_{F_0 \to F}\,\mu$ は Ω においては $\left(\frac{\Omega/F}{\mathfrak{n}}\right)$ と一致する．故に，$\left(\frac{*}{*}\right)_{2,\,F_0}$ を F_0 における平方剰余記号とすれば，(9) から

$$\chi\left(\!\left(\frac{K_0/F_0}{\mathfrak{n}}\right)\!\right) = \left(\frac{\gamma}{\mathfrak{n}}\right)_{2,\,F_0} \chi_2\left(\!\left(\frac{\Omega/F}{\mathfrak{n}}\right)\!\right).$$

これは (7) と類似の式であり，これから，K_0/F_0 に関する (A) が結論される．　(q. e. d.)

定理3の特別な場合として $F = F_0(\sqrt{-1})$ をとり，これと定理2とを合わせれば，定理1が出ることは明らかである．

以上のようなことをことさら述べた理由は，(AK) が極めて単純な数の幾何学的方法によって，単数定理はもとより，イデアル論すら用いず，直接に証明できることが明らかになったからである．その結果の詳細は未発表であるが，[1] に述べたよりも更に単純なものであり，現在 preprint 作成の準備中である．要するに，Kummer 体に関する Artin の相互法則は，整数が空間内に整然と並んでいることの帰結なのであり，Prop. 1 もまた同様の性格のものである．

Kummer体に関してArtinの相互法則がいえれば，1のn乗根を含む代数体Fにおいて，下記(10)が導き出せる．その論法は(8)を出す際に用いられるものと類似なのであるが，まずFにおけるn次のHilbert-Hasseのノルム剰余記号の積公式 $\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n=1$ がいえる．次に，$F_{\mathfrak{p}}$をFの$\mathfrak{p}$進体とするとき，βが$F_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{\alpha})/F_{\mathfrak{p}}$でノルムであれば$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n=1$ということが(AK)から直ちに導びかれ，このことだけを用いて$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n=\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1}$がいえ，従って，$\alpha,\beta,n$，($\alpha,\beta\in F$)，がどれも互いに素で，$\alpha,\beta$の一方が$n$の十分高いベキで$\equiv 1$，かつ総正であれば，$F$における$n$乗剰余記号$\left(\frac{*}{*}\right)_n$について，

(10) $$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n$$

のなりたつことが出るのである．この相互法則がそもそも本格的な代数的整数論の出発点であり，それを目標にして類体論という大がかりな理論が作り出されて行ったことを考えれば，定理1より更にあっさりと(10)自身が出てしまうことによって，整数論と拡大体との関係を特別に重視することは疑问であるという認識が得られ，同時に，Kummer, Furtwängler, Hilbert, 高木, Herbrand, Artin, Tateらの仕事は，少くとも(10)に立ち帰って考える限り，大部分が不要な回り道ということになるのである．

文　献

[1] 久保田富雄, 続・数の幾何学と類体論
数理研講究録 440, (1981), 145 - 151.

[2] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes,
Journ. Math. Soc. Japan, 3 - 1, (1951), 1 - 35.